2.5 Flächeninhalt und Volumen

Wissen

Eigenschaften und Formeln sowohl für die Flächeninhalte von Dreieck, Quadrat, Rechteck, Parallelogramm, Raute, Drachen und Trapez, als auch für die Rauminhalte von Quader, Prisma und Pyramide entnimmt man der **Formelsammlung**. Bei der Berechnung helfen geeignete **Abstände** oder das **Vektorprodukt**.

1. Zeigen Sie, dass es sich bei dem Viereck ABCD um eine Raute handelt. Berechnen Sie ihren Flächeninhalt. A

a) A(2|0|3), B(2|2|2), C(3|4|2), D(3|2|3)

b) A(2|−1|8), B(2|4|3), C(6|9|0), D(6|4|5)

1. a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{DA}| = \sqrt{5}$ L

$\Rightarrow$ Das Viereck ABCD ist eine Raute. $F_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{18} \cdot \sqrt{2} = 3$

Der Flächeninhalt beträgt 3 FE.

b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{DA}| = \sqrt{50}$

$\Rightarrow$ Das Viereck ABCD ist eine Raute. $F_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{180} \cdot \sqrt{20} = 30$

Der Flächeninhalt beträgt 30 FE.

2. Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein Quadrat ist. Berechnen Sie seinen Inhalt. A

a) A(−3|4|4), B(5|0|5), C(9|7|1), D(1|11|0)

b) A(7|−9|6), B(1|0|8), C(8|6|2), D(14|−3|0)

2. a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = 9$, $|\overrightarrow{AD}| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = 9 = |\overrightarrow{AB}|$ und L

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} = 0 \;\Rightarrow$ Das Viereck ABCD ist ein Quadrat. $F_{ABCD} = 9^2 = 81$

Der Flächeninhalt beträgt 81 FE.

b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = 11$, $|\overrightarrow{AD}| = \left|\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}\right| = 11 = |\overrightarrow{AB}|$ und

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} = 0 \;\Rightarrow$ Das Viereck ABCD ist ein Quadrat, $F_{ABCD} = 11^2 = 121$

Der Flächeninhalt beträgt 121 FE.

3. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC mit zwei verschiedenen Verfahren. A

a) A(−1|2|−8), B(1|5|−2), C(9|−4|8)

b) A(2|1|4), B(3|2|4), C(7|4|8)

c) A(−4|−3|0), B(0|1|2), C(−2|3|−1)

L

3. a) Erstes Verfahren (Vektorprodukt)

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ 16 \end{pmatrix}$,

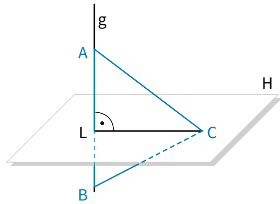
$$F_{ABC} \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ 16 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 \cdot 16 - 6 \cdot (-6) \\ 6 \cdot 10 - 2 \cdot 16 \\ 2 \cdot (-6) - 3 \cdot 10 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} 84 \\ 28 \\ -42 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot 98 = 49$$

Der Flächeninhalt beträgt 49 FE.

Zweites Verfahren (Grundseite und Höhe)

Mit der Geraden g durch A und B und der Hilfsebene H, die durch C und orthogonal zu g verläuft, kann man den Schnittpunkt L berechnen.

Skizze



$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \; s \in \mathbb{R}, \quad H: \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}\right] = 0 \text{ oder}$$

$H: 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 54$

Die Punktprobe von g in H liefert:

$2 \cdot (-1 + 2s) + 3 \cdot (2 + 3s) + 6 \cdot (-8 + 6s) = 54 \Leftrightarrow s = 2 \Rightarrow L(3|8|4)$,

$$c = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 3^2} = 7, \; h_c = \left|\overrightarrow{CL}\right| = \left|\begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-6)^2 + 12^2 + (-4)^2} = 14$$

$\Rightarrow F_{ABC} = \frac{1}{2} c \cdot h_c = 49$

Der Flächeninhalt beträgt 49 FE.

b) $H: x_1 + x_2 = 11, \; c = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2}, \; h_c = \left|\overrightarrow{CL}\right| = 3\sqrt{2} \Rightarrow F_{\Delta ABC} = 3$ FE

c) $H: x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -6, \; c = \left|\overrightarrow{AB}\right|, \; h_c = \left|\overrightarrow{CL}\right| = 4 \Rightarrow F_{\Delta ABC} = 12$ FE

A

4. Zeigen Sie, dass es sich bei dem Viereck ABCD um ein Parallelogramm handelt. Berechnen Sie seinen Flächeninhalt mit zwei verschiedenen Verfahren.

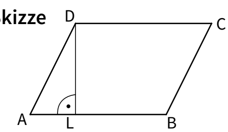
a) $A(1|2|0)$, $B(1|6|4)$, $C(5|6|6)$, $D(5|2|2)$

b) $A(-7|3|8)$, $B(-4|9|2)$, $C(11|6|2)$, $D(8|0|8)$

L

4. a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Das Viereck ABCD ist ein Parallelogramm.

Skizze



Erstes Verfahren (Vektorprodukt)

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$$F_{ABCD} = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4 \cdot 2 - 4 \cdot 0 \\ 4 \cdot 4 - 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 0 - 4 \cdot 4 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ -16 \end{pmatrix}\right| = 24$$

Der Flächeninhalt beträgt 24 FE.

Zweites Verfahren (Grundseite und Höhe)

$L(1|3|1)$, $F_{ABCD} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{DL}\right| = \sqrt{32} \cdot \sqrt{18} = 24$.

Der Flächeninhalt beträgt 24 FE.

b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 15 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Das Viereck ABCD ist ein Parallelogramm.

$L(-6\,|\,5\,|\,6)$, $F_{ABCD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{DL}| = 9 \cdot 15 = 135$

Der Flächeninhalt beträgt 135 FE.

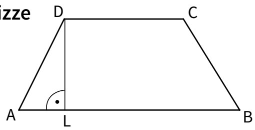
5. Zeigen Sie, dass es sich bei dem Viereck ABCD um ein Trapez handelt. A
Berechnen Sie seinen Flächeninhalt.

a) $A(0\,|\,-1\,|\,-9)$, $B(6\,|\,8\,|\,9)$, $C(10\,|\,7\,|\,0)$, $D(8\,|\,4\,|\,-6)$

b) $A(4\,|\,1\,|\,1)$, $B(1\,|\,0\,|\,9)$, $C(6\,|\,5\,|\,-11)$, $D(5\,|\,2\,|\,-3)$

5. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 18 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} = 3 \cdot \overrightarrow{DC}$ L

Skizze



$\Rightarrow$ Das Viereck ABCD ist ein Trapez.

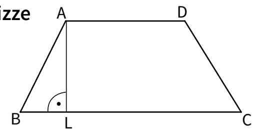
$L(2\,|\,2\,|\,-3)$,

$F_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \left(|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{DC}|\right) \cdot |\overrightarrow{DL}| = \frac{1}{2} \cdot (21 + 7) \cdot 7 = 98$

Der Flächeninhalt beträgt 98 FE.

b) $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -20 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = 5 \cdot \overrightarrow{AD}$

Skizze



$\Rightarrow$ Das Viereck ABCD ist ein Trapez.

$L(3\,|\,2\,|\,1)$,

$F_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \left(|\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{AD}|\right) \cdot |\overrightarrow{AL}| = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{450} + \sqrt{18}) \cdot \sqrt{2} = 18$

Der Flächeninhalt beträgt 18 FE.

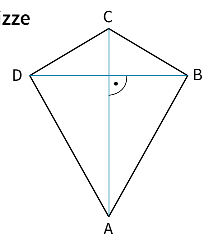
6. Gegeben sind die in einer Ebene liegenden Punkte $A(4\,|\,1\,|\,2)$, $B(4\,|\,4\,|\,5)$, $C(1\,|\,4\,|\,5)$, $D(0\,|\,2\,|\,3)$. A

a) Zeigen Sie: Das Viereck ABCD ist ein Drachen.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Drachens exakt.

6. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{18}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{BC}| = 3$, L

Skizze



$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{CD}| = 3$, $\overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{DA}| = \sqrt{18}$

Da jeweils zwei anliegende Seiten gleich lang sind und die Punkte in einer Ebene liegen, handelt es sich um einen Drachen.

b) $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$, $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$F_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}| = 6\sqrt{18} = 18\sqrt{2}$

Der Flächeninhalt beträgt $18\sqrt{2}$ FE.